

لقد عرفنا بالمحاضرة السابقة الأبجدية لنحصل على مفردات اللغة وعرفنا المجموعة $\mathcal{F}$.

سنرى الآن أنه من الممكن إعطاء توصيف أكثر وضوحاً للمجموعة $\mathcal{F}$ بشكل تدريجي كما يلي :

لنشكل متتالية $\{F_n\}_{n\geq 0}$ من $W(\mathcal{A})$ على النحو الآتي:

$$F_{n+1} = F_n \cup \{\neg F : F \in F_n\} \cup \{F\alpha G : F, G \in F_n \ , \alpha \in \{\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}\} \quad : n \in \mathbb{N}$$

نلاحظ أن هذه المتتالية متزايدة (كل حد أصغر من الحد الذي يليه [أصغر وفق علاقة الترتيب الاحتواء])

أي أنَّ $n \geq 1 \,; F_n \subseteq F_{n+1}$

عندئذٍ تكون : $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ هي المجموعة المنشودة

ارتفاع الصيغة : نعرف ارتفاع الصيغة $F \epsilon \mathcal{F}$ بأنه أصغر عدد صحيح $n \geq 0$ غير سالب بحيث يكون من أجله $F \epsilon F_n$ ونرمز له بـ $\hbar[F]$.

أمثلة : من أجل المتحول المنطقي p فإن $\hbar[p] = 0$ و $\hbar[\neg p] = 1$ و $\hbar[\neg\neg p] = 2$.

كما أنَّ $\hbar[p \Longrightarrow q] = 1$ و $\hbar[p \wedge q] = 1$ و $\hbar[\neg p \Longrightarrow q] = 2$.

و من أجل الصيغة $F = \big((p \Longrightarrow q) \vee (r \wedge s)\big)$ نلاحظ أن :

$$F_0 = \{p, q, r, s\}$$

$$F_1 = F_0 \cup \{(p \Longrightarrow q), (r \wedge s)\}$$

$$F_2 = F_1 \cup \{\big((p \Longrightarrow q) \vee (r \wedge s)\big)\}$$

إن أصغر عدد صحيح $n \geq 0$ يحقق $F \epsilon F_n$ هو $n = 2$. أيْ أنَّ ارتفاع الصيغة F هو 2 .

مبرهنة (سنقبلها دون برهان): من أجل الصيغ $F, G \in \mathcal{F}$ يكون:

١. $\hbar[\neg F] = \hbar[F] + 1$.
٢. $\hbar[F\alpha G] = sup\,\{\hbar[F], \hbar[G]\} + 1$ حيث $\alpha \in \{\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ رابطة ثنائية.
٣. $\hbar[F] < lg[F]$ ارتفاع صيغة دائماً أصغر من طولها.

ملاحظة: إن الـ ε ليست صيغة وذلك لأن طولها صفر فهي لا تحقق $\hbar[F] < lg[F]$ إذْ أن الارتفاع لا يمكن أن يكون عدداً سالباً. ولا يوجد صيغة طولها صفر والصيغ المنطقية التي طولها واحد هي فقط المتغيرات المنطقية .



تمثيل الصيغة بشجرة : قبل الخوض في ذلك سنورد تذكرة صغيرة من نظرية البيان (*The Graph Theory*) وسنهتم فقط بالبيان الموجه وبشكل خاص الأشجار الثنائية .

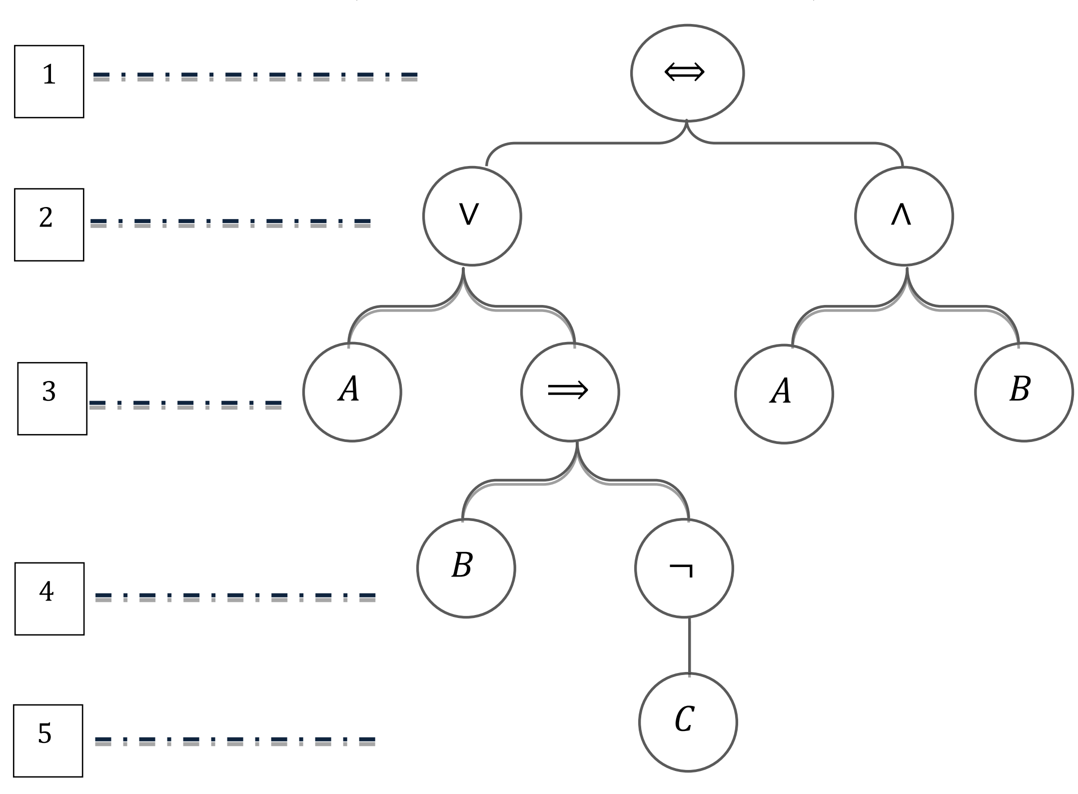
تذكرة : الشجرة: هي بيان بسيط ، مترابط ، لا يحوي دوائر .

الشجرة الثنائية : هي عبارة عن بيان موجه مثل $G\left(V;\vec{E}\right)$(عادةً نرمز لها بـ$T\left(V;\vec{E}\right)$)، وبسيط ومترابط ولا يحوي دوائر . أي هو شجرة ، بحيث:

- تمتلك عقدة واحدة نسميها الجذر (ليس لها سابق)
- كل عقدة ليست جذر يوجد لها سابق واحد فقط ندعوه الأب، والتالي لكل عقدة نسميها الأبناء وتكون مرتبة من اليسار إلى اليمين .
- العقد التي لا تمتلك أبناء ندعوها أوراقاً ، وبقية العقد ندعوها عقد داخلية.

■ **كل صيغة يمكن تمثيلها بشجرة ، وبالعكس إذا استطعنا إنشاء شجرة لسلسلة فهي صيغة .**

مثال: لتكن الصيغة $F = \Big(\big(A \vee (B \Rightarrow \neg C)\big) \Leftrightarrow (A \wedge B)\Big)$



نلاحظ أننا أمكننا تمثيل الصيغة الآنفة الذكر بشجرة ، وهذه الشجرة فيها خمس مستويات فارتفاع هذه الصيغة هو 4.

ارتفاع صيغة ممثلة بشجرة هو عدد المستويات مطروحاً منه واحد .

.: انتهت المحاضرة الثانية :.